

Inhaltsverzeichnis

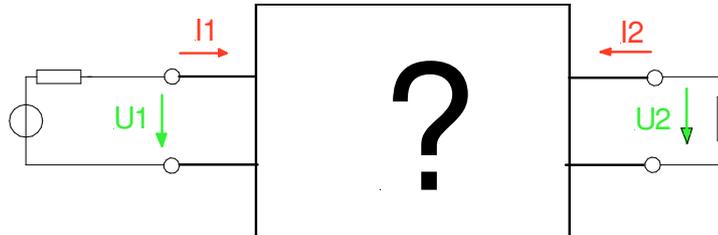
Inhaltsverzeichnis	1
1. Vierpole.....	1
1.1 Einführung in die Vierpoltheorie	2
1.2 Die verschiedenen Vierpolparameter	3
1.2.1 Y-Parameter	4
1.2.2 Z-Parameter	4
1.2.3 A-Parameter oder Kettenparameter.....	4
1.2.4 H- oder Hybridparameter	5
1.2.5 S- oder Streuparameter	5
1.2.6 T- oder Transmissionsparameter	6
1.3 Zusammenfassen von mehreren Zweitoren.....	7
1.3.1 Reihen-Reihenschaltung.....	7
1.3.2 Parallel-Parallelschaltung	8
1.3.3 Die Zweitorkette.....	9
1.4 Formale Ersatzschaltbilder für aktive Vierpole	10
1.4.1 Variante mit zwei Stromquellen basierend auf Y-Parametern.....	10
1.4.2 Variante mit einer Stromquelle basierend auf Y-Parametern	11
1.4.3 Wichtige Betriebskenngrößen der formalen Ersatzschaltungen	11
1.5 Umrechnungstabellen.....	12
1.5.1 Y, Z, h, A, B, C und D-Parameter untereinander	12
1.5.2 S-Parameter nach y, z, h oder a-Parametern und zurück.....	14

1. Vierpole

Nach einer kurzen Einführung in die Vierpoltheorie wird eine Auswahl von häufig verwendeten Vierpolparametern vorgestellt. Es wird dargestellt, wie mehrere Zweitore rechnerisch zusammengefasst werden können und somit ganze Systeme berechenbar werden. Formeln zum Umrechnen der Parameter untereinander und der klassischen Parameter y, z, h und a in s -Parameter und zurück schließen die Ausführungen ab.

1.1 Einführung in die Vierpoltheorie

In der Nachrichtentechnik gibt es viele Komponenten mit einem Eingang und einem Ausgang. Verstärker, Filter, Dämpfungsglieder, Anpassnetzwerke und viele andere Schaltungen lassen sich in diese Kategorie einordnen. Zur Beschreibung und Modellierung eines nachrichtentechnischen Systems mit einem Ein- und Ausgang bietet sich daher die vereinheitlichte Darstellung als Vierpol oder Zweitor an:



Zwei Pole, welche auch Klemmen genannt werden bilden den Eingang und die zwei verbleibenden den Ausgang. Der Eingang wird als Tor 1 definiert und der Ausgang als Tor 2. Diese oben dargestellte besondere Ausrichtung des Vierpols als Übertragungsvierpol gestattet das einfache Einfügen zwischen die Zweipole Quelle und Last. Durch die Einschränkung, dass der Abschluss der beiden Tore nur mit anderen Zweipolen erfolgt, gibt es an jedem Tor immer nur **einen** Strom und **eine** Spannung. Im Ergebnis wurden zwei Klemmenpaare definiert, an denen der Strom an einer Klemme hinein und an der anderen wieder herausfließt. Das ist eine Vereinfachung gegenüber dem allgemeinen Vierpol der Elektrotechnik, welcher vier Einströmungen an den vier Polen aufweist von denen 3 unabhängig voneinander sind und die vierte sich durch den Kirchhoffschen Knotenpunktsatz aus der Summe der drei anderen ergibt.

Am mit Zweipolen abgeschlossenen Übertragungsvierpol wird häufig nur die Frage nach dem Verhalten an den Klemmen gestellt und nicht nach dem Innenleben. Das ist die Herangehensweise bei der „Black Box“ Methode. Das Innenleben des Vierpols ist nicht bekannt. Durch Variation von zwei der vier unbekannt Klemmengrößen und Aufzeichnung der Antwort, also der Änderung der anderen beiden übrigen Klemmengrößen als Reaktion des unbekanntes Zweitors auf diese Stimulierung wird das Zweitor erforscht. Für die Auswahl der zwei zu variierenden Größen gibt es verschiedene Möglichkeiten, welche jeweils Rechenvorteile beim Zusammenfassen von mehreren Zweitoren aufweisen. Im Ergebnis dieser Untersuchung entsteht eine Ersatzschaltung, welche sich von einigen Einschränkungen abgesehen genauso verhält wie das real untersuchte Zweitor. Diese Ersatzschaltung ist ein Netzwerk und besteht bei passiven Vierpolen (z.B. LC Filter oder Dämpfungsglied) nur aus einer Kombination aus passiven Grundzweipolen R, L und C. Bei aktiven Vierpolen wie z.B. Transistoren enthält die Ersatzschaltung noch aktive Grundzweipole. Hier sind die ideale gesteuerte Stromquelle und/oder die ideale gesteuerte Spannungsquelle möglich. Mehr als diese 5 Grundelemente sollen in diesen Netzwerken nicht vorkommen um den mathematischen Aufwand zu begrenzen. Die Randbedingungen für diese Betrachtungsweise sind:

- Die Variation der beiden Klemmengrößen darf nur im Kleinsignal erfolgen, d.h. der Wert um den Arbeitspunkt des aktiven Vierpols (z.B. des Transistors) darf nur wenig schwanken. Das Kleinsignal „sieht“ sozusagen die Anstiege in der Schaltung, die Ableitungen, die differentiellen Widerstände.
- Nach Abschalten der Erregung muss die Reaktion des Vierpols darauf in endlicher Zeit ausklingen.
- Die Werte der Elemente des Ersatzschaltbildes sind konstant. Das bedeutet, dass alle Induktivitäten, alle Kapazitäten und alle Widerstände konstant sind.
- Der Vierpol muss sich linear verhalten, das bedeutet er generiert keine neuen Frequenzen.
- Die gesteuerten Quellen sind linear abhängig von einer der 4 genannten Klemmengrößen.

Können diese Randbedingungen nicht eingehalten werden, dann ist zu überdenken ob der Lösungsansatz mittels Vierpoltheorie weiter sinnvoll ist oder ob auf andere Verfahren ausgewichen werden muss.

1.2 Die verschiedenen Vierpolparameter

In der Einführung wurde aufgezeigt, dass es mehrere Möglichkeiten gibt die vier Klemmengrößen aufzuteilen in zu untersuchende Größen und in zu variierende Größen.

Die zu untersuchenden Größen sind die vom Vierpolverhalten **abhängigen** Größen, welche durch eine Messung erfasst werden. Die variierenden Größen sind die vom Vierpolverhalten **unabhängigen** Größen, welche geändert werden um die Reaktion des Vierpoles auf diese Änderung zu erhalten. Das eben beschriebene, kann mit einem Gleichungssystem ausgedrückt werden. Das Beispiel zeigt die Leitwertmatrix:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Das entspricht folgendem:

$$|AbhängigeVariable| = |Koeffizientenmatrix| \bullet |unabhängigeVariable|$$

Um jetzt die Elemente der Koeffizientenmatrix für eine Black box einzeln bestimmen zu können wird nacheinander jeweils eine der beiden unabhängigen Größen zu Null gesetzt. Bei der Leitwertmatrix muss beispielsweise durch einen Kurzschluss des Signals an Tor 1 die Signalspannung U_1 zu 0V gesetzt werden. Dann kann am Tor 2 die Spannung U_2 variiert werden und die Reaktion des Vierpols, welche sich in einer I_2 – Änderung äußert, aufgezeichnet werden. Im Parameter

$$Y_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big|_{U_1=0}$$

ist dann dieser Verhaltensaspekt des Vierpols festgehalten und beschrieben. Die anderen drei Parameter werden in analoger Weise ermittelt.

Mathematisch gesehen werden für den Vierpol zwei totale Differentiale aufgestellt zu dem jeweils zwei partielle Ableitungen existieren. Wird bei diesen Differentialen die eine Ableitung zu 0 gesetzt, also die Änderung der Größe „eingefroren“, dann kann die andere Ableitung einfach ermittelt werden. Sind alle 4 Varianten mit der jeweiligen Randbedingung, die immer eine andere der insgesamt 4 partiellen Ableitungen zu 0 setzt betrachtet worden, erhält man im Ergebnis den kompletten Satz der vier Parameter.

Diese Parameter sind komplexe Zahlen. Sie sind arbeitspunktabhängig. Das bedeutet, wenn beispielsweise an einem Transistor der Kollektorstrom von 3mA auf 5mA erhöht wird, dann ist ein weiterer Parametersatz nach der oben beschriebenen Messvorschrift neu und wiederum nur gültig für 5mA zu ermitteln.

Im folgenden soll eine Auswahl nützlicher Parameterarten vorgestellt werden.

1.2.1 Y-Parameter

Wählt man als abhängige Größen die beiden Ströme des Vierpols, dann erhält man für alle 4 Elemente der Koeffizientenmatrix Leitwerte:

$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{vmatrix}$	$y_{11} = \frac{I_1}{U_1 \ U_2=0}$ Kurzschlusseingangleitwert	$y_{12} = \frac{I_1}{U_2 \ U_1=0}$ Rückwärtsübergangleitwert
	$y_{21} = \frac{I_2}{U_1 \ U_2=0}$ Vorwärtsübergangleitwert	$y_{22} = \frac{I_2}{U_2 \ U_1=0}$ Kurzschlussausgangleitwert

Y-Parameter lassen sich bis ungefähr 100 MHz recht gut messen. Die Randbedingung U=0 am anderen Tor bedeutet, einen Kurzschluss für das Signal über die gesamte Messbandbreite zu realisieren. Das wird bei steigender Frequenz immer schwieriger. Außerdem gibt es einige Transistoren, die nicht stabil bleiben, wenn ihr Ausgangssignal kurzgeschlossen wird.

1.2.2 Z-Parameter

Wählt man als abhängige Größen die beiden Spannungen des Vierpols, dann erhält man für alle 4 Elemente der Koeffizientenmatrix Widerstände:

$\begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix}$	$z_{11} = \frac{U_1}{I_1 \ I_2=0}$ Leerlaufeingangswiderstand	$z_{12} = \frac{U_1}{I_2 \ I_1=0}$ Leerlaufrückwirkungswiderstand
	$z_{21} = \frac{U_2}{I_1 \ I_2=0}$ Leerlaufübertragungswiderstand	$z_{22} = \frac{U_2}{I_2 \ I_1=0}$ Leerlaufausgangswiderstand

Z-Parameter lassen sich im HF Bereich noch schlechter messen, da die Randbedingung I=0 am unbenutzten Tor einen Leerlauf bedeutet. Da bei hohen Frequenzen offene Tore elektromagnetische Felder abstrahlen ist der Strom zu diesem Tor hin ungleich 0. Oft bieten z-Parameter aber viele Rechenvorteile. Deshalb misst man s-Parameter und wandelt sie anschließend in z-Parameter um. Siehe auch Umrechnungstabelle und ihre Anwendung.

1.2.3 A-Parameter oder Kettenparameter

Wählt man als abhängige Größen die beiden Eingangsgrößen des Vierpols und definiert einen am Ausgang des Zweitores herausfließenden Strom, dann erhält man zwar für jedes Matrixelement eine andere physikalische Größe oder ein Größenverhältnis jedoch ergeben sich Rechenvorteile beim Zusammenfassen von hintereinander in Kette geschalteten Zweitoeren:

$\begin{vmatrix} U_1 \\ I_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{vmatrix}$	$a_{11} = \frac{U_1}{U_2 \ I_2=0}$ reziproke Leerlaufspannungsübersetzung vorwärts	$a_{12} = \frac{U_1}{-I_2 \ U_2=0}$ Kurzschlussübertragungswiderstand
	$a_{21} = \frac{I_1}{U_2 \ I_2=0}$ Leerlauf-Kern-Admittanz	$a_{22} = \frac{I_1}{-I_2 \ U_2=0}$ Kurzschlussstromübersetzung

1.2.4 H- oder Hybridparameter

H- oder Hybridparameter werden so genannt, weil die Matrixkoeffizienten nicht einheitlich sind. Hier treten wie schon bei den a-Parametern alle vier Arten der Koeffiziententypen auf:

$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$	$h_{11} = \frac{U_1}{I_1 \mid U_2=0}$ Kurzschlussingangswiderstand	$h_{12} = \frac{U_1}{U_2 \mid I_1=0}$ Leerlaufspannungsrückwirkung
	$h_{21} = \frac{I_2}{I_1 \mid U_2=0}$ Kurzschlussstromverstärkung	$h_{22} = \frac{I_2}{U_2 \mid I_1=0}$ Leerlaufausgangsleitwert

Gute Messbarkeit ist auch hier nur im NF Bereich gegeben. Das soll nicht davon abhalten im HF-Bereich gemessene s-Parameter in h-Parameter umzuwandeln wenn sich daraus Rechenvorteile ergeben. Transistorkennlinienfelder sind oft in 4 Quadranten dargestellt. Jeder Quadrant ist dann einem h-Parameter zugeordnet.

1.2.5 S- oder Streuparameter

S-Parameter lassen sich bis weit in den GHz Bereich hinein sehr gut messen. Darin liegt ihr großer Vorteil und zugleich auch der Grund für die häufige Anwendung in der Hoch- und Höchstfrequenz. Es sind Wellenparameter:

$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$	$s_{11} = \frac{b_1}{a_1 \mid a_2=0}$ Eingangsreflexionsfaktor	$s_{12} = \frac{b_1}{a_2 \mid a_1=0}$ Rückwärtstransmissionsfaktor
	$s_{21} = \frac{b_2}{a_1 \mid a_2=0}$ Vorwärtstransmissionsfaktor	$s_{22} = \frac{b_2}{a_2 \mid a_1=0}$ Ausgangsreflexionsfaktor

Mit $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{(U_n + Z_w \cdot I_n)}{\sqrt{Z_w}} = \sqrt{P_{nHIN}}$ als hineinlaufendem Wellenparameter an Tor n.

und $b_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{(U_n - Z_w \cdot I_n)}{\sqrt{Z_w}} = \sqrt{P_{nRUECK}}$ als hinauslaufendem Wellenparameter an Tor n.

Z_w ist der Bezugswellenwiderstand des Systems und meist 50Ω .

Diese beiden Formeln stellen die Brücke zur klassischen Vierpolwelt dar, die auf konzentrierten Elementen, den zwei Spannungen und Strömen und einer rein Kirchhoffschen Denkweise der Knoten und Maschen basiert. Der Vorteil der s-Parameter kommt immer dann zum tragen, wenn sich diese diskreten Größen nicht mehr messen oder sogar nicht mehr definieren lassen. Zum Beispiel lassen sich Spannungen und Ströme an einem Hohlleiterzweiger nicht mehr richtig definieren. Der Leistungstransport lässt sich jedoch noch gut nachweisen mit Hilfe der Leistungsmesstechnik. Darin liegt ein Grund für die Einführung der Wellenparameter. Der Vorteil der „alten“ Vierpolwelt liegt in den Möglichkeiten die sich durch die gute Berechenbarkeit der Netzwerke ergibt. Einige Beispiele sind im folgenden Abschnitt näher erläutert. Durch Umwandeln gemessener S-Parametern in die konventionellen Parameter lassen sich die Rechenvorteile bis in den Höchstfrequenzbereich hinein erhalten und nutzen.

Zur Messung der s-Parameter sind die nichtbenutzten Tore mit Z_w abzuschließen also anzupassen. Diese Randbedingung ist viel einfacher zu erfüllen als z.B. ein breitbandiger Kurzschluss wie bei den y-Parametern. Als abhängige Größen werden die hinauslaufenden Wellenparameter b gewählt. Unbekannte Zweitore, welche zwischen Quelle und Last eingebettet sind, lassen sich mit dieser Aufteilung optimal erforschen.

1.2.6 T- oder Transmissionsparameter

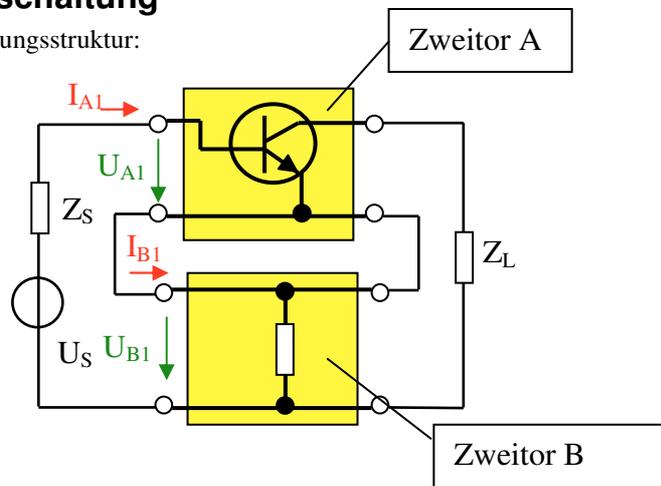
Werden als abhängige Größen die beiden Eingangswellenparameter gewählt, dann erhält man die T-Matrix. Wie schon bei den A-Parametern ergeben sich Rechenvorteile beim Zusammenfassen von in Kette geschalteten Zweitoren:

$\begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$	$t_{11} = \frac{b_1}{a_2 \text{ } b_2=0}$	$t_{12} = \frac{b_1}{b_2 \text{ } a_2=0}$
	$t_{21} = \frac{a_1}{a_2 \text{ } b_2=0}$	$t_{22} = \frac{a_1}{b_2 \text{ } a_2=0}$

1.3 Zusammenfassen von mehreren Zweitoren

1.3.1 Reihen-Reihenschaltung

Gegeben sei die folgende Schaltungsstruktur:



Aus vierpoltheoretischer Sicht handelt es sich um zwei Zweitore, deren Eingangsklemmen in Reihe geschaltet sind und deren Ausgangsklemmen in Reihe geschaltet sind. Liegt jetzt für beide Zweitore eine Beschreibung mit Z-Parametern vor, dann können sie mit wenig Rechenaufwand zu einem resultierenden neuen Zweitor zusammengefasst werden. Am Beispiel des Parameters Z_{11} soll das aufgezeigt werden.

Für Zweitor A gilt: $U_{A1} = I_{A1} \cdot z_{11A}$ mit der Randbedingung $I_{A2} = 0$.

Für Zweitor B gilt analog: $U_{B1} = I_{B1} \cdot z_{11B}$ mit der Randbedingung $I_{B2} = 0$.

Für das neue zusammengefasste Zweitor gilt dann: $U_1 = U_{A1} + U_{B1}$ und $I_{A1} = I_{B1} = I_1$ da alle Ausgangsströme gleich 0 sind.

Somit ergibt sich: $U_1 = U_{A1} + U_{B1} = I_1 (z_{11A} + z_{11B}) = I_1 \cdot z_{11}$

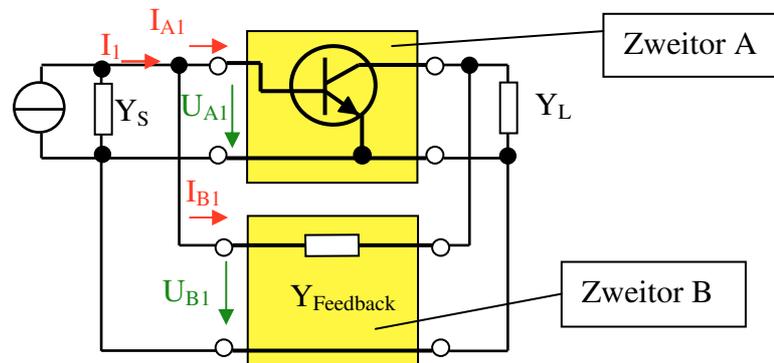
Das gilt in Analogie für die anderen 3 Parameter. Die Z-Parameter des resultierenden Gesamtvierpoles ergeben sich daher aus der Summe der Parameter des Vierpoles A und des Vierpoles B:

$$\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (z_{11A} + z_{11B}) & (z_{12A} + z_{12B}) \\ (z_{21A} + z_{21B}) & (z_{22A} + z_{22B}) \end{vmatrix}$$

Liefert zum Beispiel ein Hersteller s-Parameter zu seinem Transistor kann man diese in Z-Parameter umrechnen. Das Verhalten der passiven Zusatzschaltung, welche oben im zweiten Vierpol zusammengefasst wurde, lässt sich häufig mit wenig Rechenaufwand ebenfalls mit Z-Parametern ausdrücken. Das Verhalten der Gesamtschaltung lässt sich dann nach der hier beschriebenen Methode ermitteln. Der Entwurf von Gegenkopplungen, Stabilitätsbetrachtungen und auch Oszillatordesign werden auf diese Weise möglich.

1.3.2 Parallel-Parallelschaltung

Gegeben sei jetzt die folgende Schaltung, die wiederum auf zwei Vierpole aufgeteilt wurde:



Aus vierpoltheoretischer Sicht handelt es sich in diesem Fall um zwei Zweitore, deren Eingangsklemmen parallel geschaltet sind und deren Ausgangsklemmen parallel geschaltet sind. Liegt jetzt für beide Zweitore eine Beschreibung mit Y-Parametern vor, dann können sie mit wenig Rechenaufwand zu einem resultierenden neuen Zweitor zusammengefasst werden. Am Beispiel des Parameters Y_{11} soll das aufgezeigt werden.

Für Zweitor A gilt: $I_{A1} = U_{A1} \cdot y_{11A}$ mit der Randbedingung $U_{A2} = 0$.

Für Zweitor B gilt analog: $I_{B1} = U_{B1} \cdot y_{11B}$ mit der Randbedingung $U_{B2} = 0$.

Für das neue zusammengefasste Zweitor gilt dann: $I_1 = I_{A1} + I_{B1}$ und $U_{A1} = U_{B1} = U_1$ da die Eingangsklemmen parallelgeschaltet sind.

Somit ergibt sich: $I_1 = I_{A1} + I_{B1} = U_1 (y_{11A} + y_{11B}) = U_1 \cdot y_{11}$

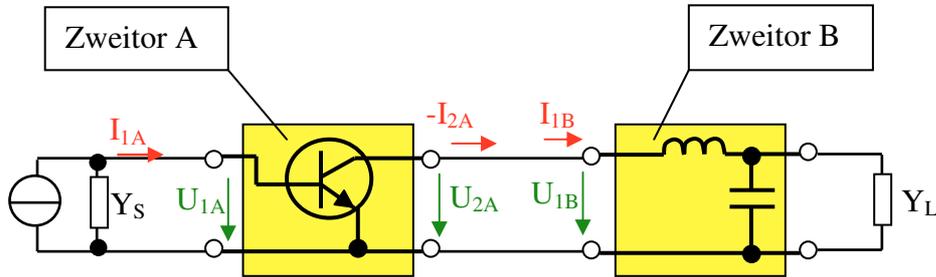
Das gilt in ähnlicher Weise für die anderen 3 Parameter auch. Die Y-Parameter des resultierenden Gesamtvierpoles ergeben sich daher wiederum aus der Summe der Parameter des Vierpols A und der des Vierpols B:

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (y_{11A} + y_{11B}) & (y_{12A} + y_{12B}) \\ (y_{21A} + y_{21B}) & (y_{22A} + y_{22B}) \end{vmatrix}$$

Auch dieser Sachverhalt hilft häufig beim Schaltungsentwurf. Für Oszillatoren wird zum Beispiel die Randbedingung $I_1 = 0$ für das resultierende Gesamtzweitor aufgestellt und für diese Vorgabe das parallelliegende Rückkoppelnetzwerk entwickelt. $I_1 = 0$ bedeutet, dass die oben dargestellte Quelle abgeschaltet werden könnte da der Verstärkereingang genug Energie über das Rückkoppelnetzwerk erhält. Das System oszilliert.

1.3.3 Die Zweitorkette

Der Sinn der A-Parameter zeigt sich an folgendem Beispiel einer Zweitorkette:



Für das Zweitor A gilt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix} U_{1A} \\ I_{1A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11A} & a_{12A} \\ a_{21A} & a_{22A} \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} U_{2A} \\ -I_{2A} \end{vmatrix}$$

Die Ausgangsgrößen von Zweitor A sind zugleich die Eingangsgrößen von Zweitor B da der Ausgangsstrom bei den A-Parametern in der geänderten Fließrichtung definiert ist:

$$\begin{vmatrix} U_{2A} \\ -I_{2A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{1B} \\ I_{1B} \end{vmatrix}$$

Für Zweitor B gilt weiterhin:

$$\begin{vmatrix} U_{1B} \\ I_{1B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11B} & a_{12B} \\ a_{21B} & a_{22B} \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} U_{2B} \\ -I_{2B} \end{vmatrix}$$

Einsetzen dieses Ausdruckes in den Ausdruck für das Gleichungssystem von Zweitor A führt schließlich zu folgendem:

$$\begin{vmatrix} U_{1A} \\ I_{1A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11A} & a_{12A} \\ a_{21A} & a_{22A} \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} a_{11B} & a_{12B} \\ a_{21B} & a_{22B} \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} U_{2B} \\ -I_{2B} \end{vmatrix}$$

Abhängige Größen am Eingang der Zweitorkette

Die A-Matrix der Zweitorkette ist das Produkt der beiden Einzelmatrixen A und B

Unabhängige Größen am Ausgang der Zweitorkette

Durch diesen Zusammenhang lassen sich einzelne Zweitore, die in Kette hintereinandergeschaltet sind zu einem einzigen neuen resultierenden Zweitor zusammenfassen.

Auch beim hier vorgestellten Beispiel können die A-Parameter von Zweitor B mit relativ wenig Aufwand von Hand berechnet werden. Beim Transistor wäre wiederum eine Umrechnung von gemessenen S-Parametern in A-Parameter denkbar. Für solche Zwecke dienen die im folgenden Abschnitt vorgestellten Tabellen zum Umrechnen von einer Parameterart in eine andere.

1.4 Formale Ersatzschaltbilder für aktive Vierpole

Das Kleinsignalverhalten von Transistoren und auch von anderen Verstärkerzweipolen lässt sich für viele Anwendungen sehr gut mit linearen Ersatzschaltungen beschreiben. Werden diese Ersatzschaltbilder nur unter Verwendung der 5 linearen Grundzweipole erstellt, dann reduziert sich der mathematische Aufwand für die Schaltungsberechnung. Häufig gelangt man mit diesen einfachen Schaltbildern und ihrem Verhalten schon recht dicht heran an das Verhalten der realen Schaltungen. Wichtig ist sich vorher über den benötigten Frequenzbereich Gedanken zu machen, den die Schaltung beschreiben soll. Bei tiefen Frequenzen kann zum Beispiel die Rückwirkung oft mit 0 angesetzt werden und daher entfallen. Bei höheren Frequenzen hingegen wird eine genauere Betrachtung notwendig. Bei sehr hohen Frequenzen müssen dann noch weitere Grundzweipole ergänzt werden um zum Beispiel Bonddrähte und Gehäusekapazitäten nachzubilden, da diese dann den Frequenzgang der Betriebsgrößen nachhaltig verändern. Durch die unter 1.3 beschriebenen Zusammenfassungen lässt sich dann beispielsweise die vollständige Berechnung der verfeinerten Ersatzschaltung durchführen.

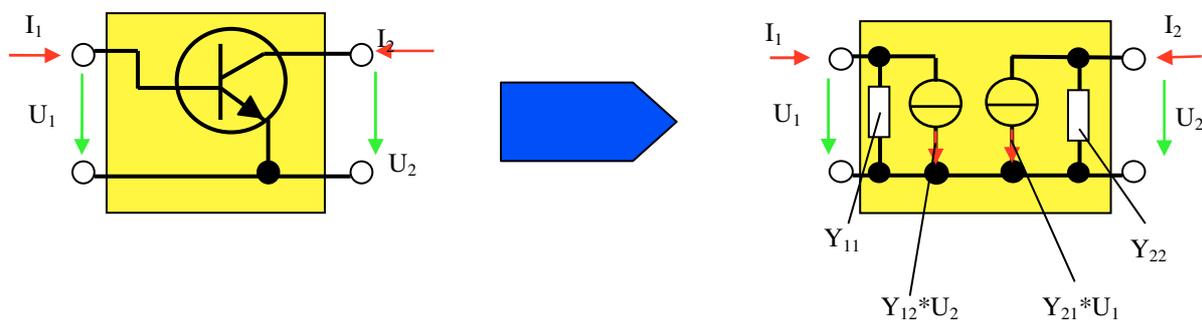
1.4.1 Variante mit zwei Stromquellen basierend auf Y-Parametern

Bei dieser Form werden die beiden Vierpolgleichungen direkt in eine formale Ersatzschaltung umgesetzt:

$$I_1 = y_{11} \cdot U_1 + y_{12N} \cdot U_2$$

$$I_2 = y_{21} \cdot U_1 + y_{22} \cdot U_2$$

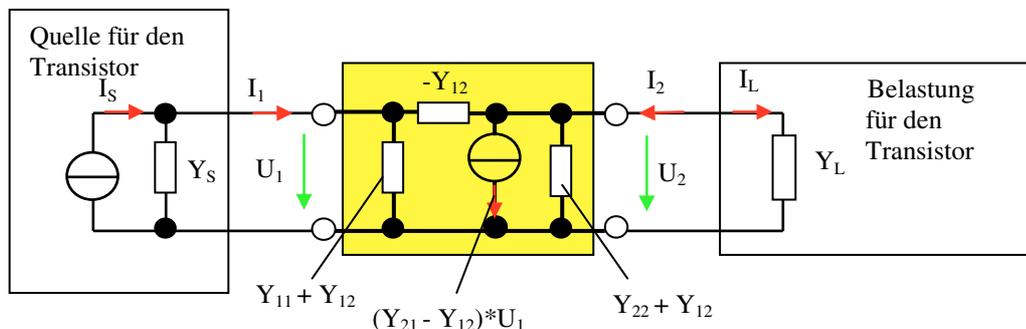
Das Klemmenverhalten für einen Bipolartransistor in Emitterschaltung im Kleinsignalbetrieb kann dann wie folgt modelliert werden:



Jeder der beiden Ströme besteht aus zwei Anteilen. Ein Anteil besteht jeweils aus einer passiven Ableitung (Y-Parameter mit identischen Indizes). Der andere Anteil besteht aus einer Stromquelle, die mit der Spannung vom jeweils anderen Tor gesteuert ist. Die Höhe des Stromes ist das Produkt aus diesen auch als Steilheiten bezeichneten Leitwerten (Y-Parameter mit unterschiedlichen Indizes) und der steuernden Spannung. Ein sinusförmiger U_1 Verlauf erzeugt somit eine sinusförmige Stromänderung am Ausgangsklemmenpaar und umgekehrt. Für Feldeffekttransistoren, Röhren und andere Dreipole die in Übertragungsvierpole eingebettet werden können ist diese Variante ebenfalls geeignet. Nicht geeignet ist diese Formalisierung zur Beschreibung des Gleichstromklemmenverhaltens über den gesamten Arbeitsbereich, da der Transistor hierbei einen stark nichtlinearen Vierpol darstellt und das Arbeiten mit den Tangenten als Ersatz für den realen Kurvenverlauf zu großen Abweichungen führt.

1.4.2 Variante mit einer Stromquelle basierend auf Y-Parametern

Bei der folgenden Form wird die Rückwirkung durch einen passiven Leitwert mit $-Y_{12}$ dargestellt. Die Darstellung zeigt jetzt zusätzlich die „Einbettung“ des aktiven Zweitores zwischen Quelle und Last:



Die Einbettung liefert zusätzlich zu dem Vierpolgleichungspaar noch folgende mathematische Zusammenhänge:

$$I_1 = I_S - Y_S \cdot U_1 \quad \text{und}$$

$$I_2 = -I_L = -U_2 \cdot Y_L$$

Die zu berechnenden Anwendungen bestehen dann vollständig aus Quellen und Belastungen und können effizient berechnet werden wenn parallel liegende Leitwerte zusammengefasst werden. Es lassen sich Stabilitätsbetrachtungen durchführen, Verstärkungsfrequenzgänge berechnen und vieles mehr.

Bei der Anwendung dieser Ersatzschaltbildform ist zu beachten, dass durch die PI-Form des Netzwerkes sich die Größen der passiven Leitwerte an Ein- und Ausgang geändert haben. Warum das so ist, kann man sich durch Einsetzen der jeweiligen Randbedingungen zum Y-Parameter verdeutlichen. Für Y_{22} ist beispielsweise U_1 gleich 0 zu setzen, also das Signal kurz zuschließen. Damit liegt $-Y_{12}$ parallel zu $Y_{22} + Y_{12}$ und dadurch ist der Gesamtleitwert der Parallelschaltung beider wiederum Y_{22} . Das lässt sich in der Art für alle vier Einzelparameter aufzeigen. Oder man stelle sich zwei Vierpole vor. Einer enthält nur das Y_{12} -Querglied und der andere den Transistor mit einer Rückwirkung von 0. Fasst man beide zusammen, wie unter 1.3.2 beschrieben, dann erhält man die hier dargestellte auf den ersten Blick vielleicht etwas gewöhnungsbedürftige Form. Für Rückkopplungsbetrachtungen ist diese Form m.E. anschaulicher. Auch Neutralisationsnetzwerke und andere zusätzliche Rückkoppelstrukturen lassen sich anschaulicher hinzufügen usw.

1.4.3 Wichtige Betriebskenngrößen der formalen Ersatzschaltungen

Eingangsleitwert	Ausgangsleitwert	Spannungsverstärkung	Stromverstärkung	Betriebsleistungsverstärkung
Input admittance	Output admittance	Voltage gain	Current gain	Operational power gain
$Y_{IN} = \frac{I_1}{U_1} = \frac{1}{Z_{IN}}$	$Y_{OUT} = \frac{I_2}{U_2} = \frac{1}{Z_{OUT}}$	$v_U = \frac{U_2}{U_1} = S \cdot R_{OUT}$	$v_I = -\frac{I_2}{I_1}$	$v_P = \frac{P_L}{P_{IN}}$
$Y_{IN} = y_{11} - \frac{y_{12} \cdot y_{21}}{y_{22} + Y_L}$	$Y_{OUT} = y_{22} - \frac{y_{12} \cdot y_{21}}{y_{11} + Y_S}$	$v_U = -\frac{y_{21}}{y_{22} + Y_L}$	$v_I = v_U \cdot \frac{Y_L}{Y_{IN}}$	$v_P = \left \frac{y_{21}}{y_{22} + Y_L} \right ^2 \cdot \frac{G_L}{\text{Re}(Y_{IN})}$

1.5 Umrechnungstabellen

Ist das Verhalten des Vierpoles mit einer Art von Parametern vollständig beschrieben, dann kann mit Hilfe der vorliegenden Tabellen in andere Arten der eben vorgestellten Parameter umgerechnet werden. So lassen sich die dargestellten Vorteile beim Zusammenfassen von Vierpolen nutzen. Mathematisch gesehen ist jede Lösung unabhängig von der Aufteilung der Klemmengrößen gleichwertig.

1.5.1 Y, Z, h, A, B, C und D-Parameter untereinander

Die folgende Tabelle enthält noch weitere bisher nicht vorgestellte Parameterarten. Damit enthält die Tabelle die 7 üblichen Aufteilungsvarianten für die 4 Klemmengrößen. Die Anwendung einzelner dieser Parameterarten mag zwar seltener vorkommen jedoch können sie in Sonderfällen sehr hilfreich sein. Bei der B-Matrix sind beispielsweise die Stromrichtungen umgekehrt wie bei der A-Matrix definiert. So ist eine Zweitorkette berechenbar wie bei der A-Matrix aber mit entgegengesetzter Signalflussrichtung. Die C-Matrix dient dem Zusammenfassen von zwei Einzelweitoren in Parallel-Reihenschaltung. Die D-Matrix ermöglicht das für die Reihen-Parallelschaltung. Reihen-Parallel bedeutet in diesem Zusammenhang, dass eine Reihenschaltung der Eingänge und eine Parallelschaltung der Ausgänge der beiden Zweitore vorliegt, welche rechnerisch zusammengefasst werden sollen:

	Y	Z	A	B	C	D	h
Y₁₁	-	$\frac{Z_{22}}{\Delta_Z}$	$\frac{A_{22}}{A_{12}}$	$\frac{B_{11}}{B_{12}}$	$-\frac{\Delta_C}{C_{21}}$	$\frac{1}{D_{12}}$	$\frac{1}{h_{11}}$
Y₁₂	-	$-\frac{Z_{12}}{\Delta_Z}$	$-\frac{\Delta_A}{A_{12}}$	$-\frac{1}{B_{12}}$	$\frac{C_{11}}{C_{21}}$	$-\frac{D_{11}}{D_{12}}$	$-\frac{h_{12}}{h_{11}}$
Y₂₁	-	$-\frac{Z_{21}}{\Delta_Z}$	$-\frac{1}{A_{12}}$	$-\frac{\Delta_B}{B_{12}}$	$-\frac{C_{22}}{C_{21}}$	$\frac{D_{22}}{D_{12}}$	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$
Y₂₂	-	$\frac{Z_{11}}{\Delta_Z}$	$\frac{A_{11}}{A_{12}}$	$\frac{B_{22}}{B_{12}}$	$\frac{1}{C_{21}}$	$-\frac{\Delta_D}{D_{12}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{11}}$
Z₁₁	$\frac{Y_{22}}{\Delta_Y}$	-	$\frac{A_{11}}{A_{21}}$	$\frac{B_{22}}{B_{21}}$	$\frac{1}{C_{12}}$	$-\frac{\Delta_D}{D_{21}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{22}}$
Z₁₂	$-\frac{Y_{12}}{\Delta_Y}$	-	$\frac{\Delta_A}{A_{21}}$	$\frac{1}{B_{21}}$	$-\frac{C_{11}}{C_{12}}$	$\frac{D_{11}}{D_{21}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$
Z₂₁	$-\frac{Y_{21}}{\Delta_Y}$	-	$\frac{1}{A_{21}}$	$\frac{\Delta_B}{B_{21}}$	$\frac{C_{22}}{C_{12}}$	$-\frac{D_{22}}{D_{21}}$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}}$
Z₂₂	$\frac{Y_{11}}{\Delta_Y}$	-	$\frac{A_{22}}{A_{21}}$	$\frac{B_{11}}{B_{21}}$	$-\frac{\Delta_C}{C_{12}}$	$\frac{1}{D_{21}}$	$\frac{1}{h_{22}}$
A₁₁	$-\frac{Y_{22}}{Y_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	-	$\frac{B_{22}}{\Delta_B}$	$\frac{1}{C_{22}}$	$\frac{\Delta_D}{D_{22}}$	$-\frac{\Delta_h}{h_{21}}$
A₁₂	$-\frac{1}{Y_{21}}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{21}}$	-	$\frac{B_{12}}{\Delta_B}$	$\frac{C_{21}}{C_{22}}$	$-\frac{D_{12}}{D_{22}}$	$-\frac{h_{11}}{h_{21}}$
A₂₁	$-\frac{\Delta_Y}{Y_{21}}$	$\frac{1}{Z_{21}}$	-	$\frac{B_{21}}{\Delta_B}$	$\frac{C_{12}}{C_{22}}$	$-\frac{D_{21}}{D_{22}}$	$-\frac{h_{22}}{h_{21}}$
A₂₂	$-\frac{Y_{11}}{Y_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	-	$\frac{B_{11}}{\Delta_B}$	$-\frac{\Delta_C}{C_{22}}$	$-\frac{1}{D_{22}}$	$-\frac{1}{h_{21}}$

	Y	Z	A	B	C	D	h
B₁₁	$-\frac{Y_{11}}{Y_{12}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{12}}$	$\frac{A_{22}}{\Delta_A}$	-	$\frac{\Delta_C}{C_{11}}$	$\frac{1}{D_{11}}$	$\frac{1}{h_{12}}$
B₁₂	$-\frac{1}{Y_{12}}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{12}}$	$\frac{A_{12}}{\Delta_A}$	-	$-\frac{C_{21}}{C_{11}}$	$\frac{D_{12}}{D_{11}}$	$\frac{h_{11}}{h_{12}}$
B₂₁	$-\frac{\Delta_Y}{Y_{12}}$	$\frac{1}{Z_{12}}$	$\frac{A_{21}}{\Delta_A}$	-	$-\frac{C_{12}}{C_{11}}$	$\frac{D_{21}}{D_{11}}$	$\frac{h_{22}}{h_{12}}$
B₂₂	$-\frac{Y_{22}}{Y_{12}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{12}}$	$\frac{A_{11}}{\Delta_A}$	-	$-\frac{1}{C_{11}}$	$-\frac{\Delta_D}{D_{11}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{12}}$
C₁₁	$\frac{Y_{12}}{Y_{22}}$	$-\frac{Z_{12}}{Z_{11}}$	$-\frac{\Delta_A}{A_{11}}$	$-\frac{1}{B_{22}}$	-	$\frac{D_{11}}{\Delta_D}$	$-\frac{h_{12}}{\Delta_h}$
C₁₂	$\frac{\Delta_Y}{Y_{22}}$	$\frac{1}{Z_{11}}$	$\frac{A_{21}}{A_{11}}$	$\frac{B_{21}}{B_{22}}$	-	$-\frac{D_{21}}{\Delta_D}$	$\frac{h_{22}}{\Delta_h}$
C₂₁	$\frac{1}{Y_{22}}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{11}}$	$\frac{A_{12}}{A_{11}}$	$\frac{B_{12}}{B_{22}}$	-	$-\frac{D_{12}}{\Delta_D}$	$\frac{h_{11}}{\Delta_h}$
C₂₂	$-\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$	$\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$	$\frac{1}{A_{11}}$	$\frac{\Delta_B}{B_{22}}$	-	$\frac{D_{22}}{\Delta_D}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta_h}$
D₁₁	$-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$\frac{\Delta_A}{A_{22}}$	$\frac{1}{B_{11}}$	$\frac{C_{11}}{\Delta_C}$	-	h_{12}
D₁₂	$\frac{1}{Y_{11}}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{22}}$	$\frac{A_{12}}{A_{22}}$	$\frac{B_{12}}{B_{11}}$	$-\frac{C_{21}}{\Delta_C}$	-	h_{11}
D₂₁	$\frac{\Delta_Y}{Y_{11}}$	$\frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{A_{21}}{A_{22}}$	$\frac{B_{21}}{B_{11}}$	$-\frac{C_{12}}{\Delta_C}$	-	h_{22}
D₂₂	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$	$-\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{A_{22}}$	$-\frac{\Delta_B}{B_{11}}$	$\frac{C_{22}}{\Delta_C}$	-	h_{21}

Für die H-Parameter siehe bei D.

1.5.2 S-Parameter nach y, z, h oder a-Parametern und zurück

y, z, h und a nach s		s nach y, z, h und a		
<p>Wichtig : Die gegebenen Parameter sind in auf den Wellenwiderstand normierter Form dimensionslos in die Gleichungen zur Berechnung der s-Parameter einzusetzen. Zum Beispiel: $y_{11} = \frac{Y_{11}}{20mS}$ bei 50Ω Bezugswellenwiderstand der S-Parameter. Auch die Berechnung der jeweiligen Determinante Δ muss mit den normierten Parametern erfolgen!</p>		<p>Anmerkung: Die Ergebnisse für die untenstehenden Gleichungen weisen keine Normierung auf.</p>		
y	$s_{11} = \frac{y_{22} + 1 - (\Delta_y + y_{11})}{y_{22} + 1 + \Delta_y + y_{11}}$	$s_{12} = \frac{-2y_{12}}{y_{22} + 1 + \Delta_y + y_{11}}$	$y_{11} = \frac{1 + s_{22} - s_{11} - \Delta_s}{1 + s_{22} + s_{11} + \Delta_s} \cdot \frac{1}{Z_w}$	$y_{12} = \frac{-2 \cdot s_{12}}{1 + s_{22} + s_{11} + \Delta_s} \cdot \frac{1}{Z_w}$
	$s_{21} = \frac{-2y_{21}}{y_{22} + 1 + \Delta_y + y_{11}}$	$s_{22} = \frac{y_{11} + 1 - (\Delta_y + y_{22})}{y_{22} + 1 + \Delta_y + y_{11}}$	$y_{21} = \frac{-2 \cdot s_{21}}{1 + s_{22} + s_{11} + \Delta_s} \cdot \frac{1}{Z_w}$	$y_{22} = \frac{1 - s_{22} + s_{11} - \Delta_s}{1 + s_{22} + s_{11} + \Delta_s} \cdot \frac{1}{Z_w}$
z	$s_{11} = \frac{\Delta_z + z_{11} - (z_{22} + 1)}{\Delta_z + z_{11} + z_{22} + 1}$	$s_{12} = \frac{2 \cdot z_{12}}{\Delta_z + z_{11} + z_{22} + 1}$	$z_{11} = \frac{1 - s_{22} + s_{11} - \Delta_s}{1 - s_{22} - s_{11} + \Delta_s} \cdot Z_w$	$z_{12} = \frac{2 \cdot s_{12}}{1 - s_{22} - s_{11} + \Delta_s} \cdot Z_w$
	$s_{21} = \frac{2 \cdot z_{21}}{\Delta_z + z_{11} + z_{22} + 1}$	$s_{22} = \frac{\Delta_z + z_{22} - (z_{11} + 1)}{\Delta_z + z_{11} + z_{22} + 1}$	$z_{21} = \frac{2 \cdot s_{21}}{1 - s_{22} - s_{11} + \Delta_s} \cdot Z_w$	$z_{22} = \frac{1 + s_{22} - s_{11} - \Delta_s}{1 - s_{22} - s_{11} + \Delta_s} \cdot Z_w$
h	$s_{11} = \frac{h_{11} + \Delta_h - 1 - h_{22}}{h_{11} + \Delta_h + 1 + h_{22}}$	$s_{12} = \frac{2 \cdot h_{12}}{h_{11} + \Delta_h + 1 + h_{22}}$	$h_{11} = \frac{\Delta_s + s_{11} + s_{22} + 1}{-\Delta_s - s_{11} + s_{22} + 1} \cdot Z_w$	$h_{12} = \frac{2 \cdot s_{12}}{-\Delta_s - s_{11} + s_{22} + 1}$
	$s_{21} = \frac{-2 \cdot h_{21}}{h_{11} + \Delta_h + 1 + h_{22}}$	$s_{22} = \frac{h_{11} - \Delta_h + 1 - h_{22}}{h_{11} + \Delta_h + 1 + h_{22}}$	$h_{21} = \frac{-2 \cdot s_{21}}{-\Delta_s - s_{11} + s_{22} + 1}$	$h_{22} = \frac{\Delta_s - s_{11} - s_{22} + 1}{-\Delta_s - s_{11} + s_{22} + 1} \cdot \frac{1}{Z_w}$
a	$s_{11} = \frac{a_{11} + a_{12} - a_{21} - a_{22}}{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}}$	$s_{12} = \frac{2\Delta_a}{a_{11} + a_{21} + a_{12} + a_{22}}$	$a_{11} = \frac{(1 + s_{11}) \cdot (1 - s_{22}) + s_{12} \cdot s_{21}}{2 \cdot s_{21}}$	$a_{12} = \frac{Z_w \{ (1 + s_{11}) \cdot (1 + s_{22}) - s_{12} \cdot s_{21} \}}{2 \cdot s_{21}}$
	$s_{21} = \frac{2}{a_{11} + a_{21} + a_{12} + a_{22}}$	$s_{22} = \frac{a_{22} + a_{12} - a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}}$	$a_{21} = \frac{(1 - s_{11}) \cdot (1 - s_{22}) - s_{12} \cdot s_{21}}{Z_w \cdot 2 \cdot s_{21}}$	$a_{22} = \frac{(1 - s_{11}) \cdot (1 + s_{22}) + s_{12} \cdot s_{21}}{2 \cdot s_{21}}$

Anmerkung zu den A-Parameter: Auch a_{12} und a_{21} müssen zur Berechnung der s-Parameter in normierter Form eingesetzt werden, da sie einheitenbehaftet sind. Das ist auch wichtig zu wissen für die Determinantenberechnung zur a-Matrix, welche mit normierten Parametern erfolgen muss.