Rauschen

Am Ende eines nachrichtentechnischen Systems zur Informationsübertragung ist von der ursprünglich vorhandenen ausgesendeten Energie meist nur noch sehr wenig vorhanden. Es kommt darauf an aus dieser wenigen Energie die darin versteckte Information herauszuholen. Die Energie, welche die Information enthält ist auf ihrem Weg vom Sender zum Empfänger mit Rauschenergie überlagert worden. Das Verhältnis zwischen diesen beiden Energieanteilen ist der Signal- zu Rauschabstand. Es gibt verschiedene Ursachen für das Rauschen in nachrichtentechnischen Systemen. Einige sollen hier kurz vorgestellt werden. Im Anschluss wird in die Rauschrechnung eingeführt und aufgezeigt, wann die Bemühungen um geringes Rauschen sinnvoll sind und wann nicht.

Das thermische Rauschen

Durch die Wärmebewegung der Moleküle ist dem direkten Stromfluss ein Rauschen überlagert.
Befindet sich ein ohmscher Widerstand im Wärmegleichgewicht mit seiner Umgebung dann gilt für die Rauschleistung je Frequenz folgende Beziehung (Quelle: Manfred Kummer, Grundlagen der Mikrowellentechnik):

$$dP_N = A^2(f) \cdot \frac{h \cdot f}{e^{\frac{h \cdot f}{k \cdot T}} - 1} \cdot df \qquad (1)$$

mit der Boltzmannkonstante $k = 1.3804 \cdot 10^{-23} \frac{Ws}{K}$

und dem planckschen Wirkungsquantum $h = 6.625 \cdot 10^{-34} Ws^2$

und einem in der Praxis sicherlich vorhandenem Amplitudenfrequenzgang $A(f)$
und der absoluten Temperatur T in Kelvin.

Bleibt der Ausdruck $\frac{h \cdot f}{k \cdot T}$ klein genug, dann kann mit guter Genauigkeit weiter vereinfacht werden.

Das ist der Fall bei nicht zu tiefen Temperaturen und Frequenzen bis ungefähr 100GHz. Ein Beispiel soll das zeigen. Für f=10GHz und $T=T_0=290K$ erhält man:

$$\frac{h \cdot f}{k \cdot T} = \frac{6.625 \cdot 10^{-34} Ws^2 \cdot 10 \cdot 10^9 s^{-1}}{1.3804 \cdot 10^{-23} \cdot Ws \cdot K^{-1} \cdot 290K} = \frac{6.625 \cdot 10^{-1}}{1.3804 \cdot 290} = \underline{1.6549 \cdot 10^{-3}}$$

Die e-Funktion kann als Potenzreihe ausgedrückt werden:

$$e^{\frac{h\cdot f}{k\cdot T}} = \frac{\left(\frac{h\cdot f}{k\cdot T}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{h\cdot f}{k\cdot T}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{h\cdot f}{k\cdot T}\right)^2}{2!} + \dots + \frac{\left(\frac{h\cdot f}{k\cdot T}\right)^n}{n!}$$

Für unseren Fall ist der Term $\frac{h\cdot f}{k\cdot T}$ so klein, dass bereits das quadratische Glied der Potenzreihe keinen nennenswerten Zuwachs mehr liefert(10^{-3} zum Quadrat ist bereits 10^{-6}). Daher kann die Reihe mit guter Näherung nach dem linearen Glied abgebrochen werden und man erhält:

$$e^{\frac{h\cdot f}{k\cdot T}} \approx \frac{\left(\frac{h\cdot f}{k\cdot T}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{h\cdot f}{k\cdot T}\right)^1}{1!} = 1 + \left(\frac{h\cdot f}{k\cdot T}\right) \qquad (2)$$

Der näherungsweise Ausdruck (2) kann jetzt in (1) eingesetzt werden:

$$dP_N = A^2(f)\cdot\frac{h\cdot f}{1+\left(\frac{h\cdot f}{k\cdot T}\right)-1}\cdot df = A^2(f)\cdot k\cdot T\cdot df \qquad (3)$$

Wird jetzt der Amplitudenfrequenzgang für den betrachteten Frequenzabschnitt mit 1 angesetzt erhalten wir gültig für einen Frequenzbandausschnitt mit der Bandbreite B die durch die Molekülbewegungen verursachte Rauschleistung:

$$P_N = k\cdot T\cdot \Delta f = k\cdot T\cdot B \qquad (4)$$

In der Rauschrechnung wird Formel (4) intensiv verwendet. Es darf aber niemals die Herkunft vergessen werden und im Zweifel ist zu prüfen ob nicht (1) verwendet werden muss.

Rauschmaß und Rauschzahl

Die ersten Stufen eines Verstärkers für sehr kleine Signale sollen so ausgelegt werden, dass der Signal zu Rauschabstand möglichst gut erhalten bleibt. Dafür ist eine Betrachtung des Rauschverhaltens unter Zuhilfenahme des Rauschmaßes geeignet. Das Rauschmaß ist für ein Zweitor wie folgt definiert:

$$F = \frac{SNR_{IN}}{SNR_{OUT}} = \frac{Signal\_zu\_Rauschverhältnis\_am\_Eingang}{Signal\_zu\_Rauschverhältnis\_am\_Ausgang} \qquad (5)$$

Das Rauschmaß beschreibt den Rauschbeitrag des Zweitores. Durch Umformung lässt sich das besser erkennen:

$$F = \frac{SNR_{IN}}{SNR_{OUT}} = \frac{\dfrac{P_{Signal\_IN}}{P_{Noise\_IN}}}{\dfrac{P_{Signal\_OUT}}{P_{Noise\_OUT}}}$$

Der Doppelbruch wird aufgelöst: $F = \frac{P_{Signal\_IN}}{P_{Noise\_IN}} \cdot \frac{P_{Noise\_OUT}}{P_{Signal\_OUT}}$

In diese Form wird der Ausdruck für die Leistungsverstärkung des Zweitores $G = \frac{P_{Signal\_OUT}}{P_{Signal\_IN}}$ eingesetzt

und der Ausdruck für die Quellrauschleistung
bei einer Quelltemperatur von T_0 =290K am Eingang des Zweitores $P_{Noise\_IN} = k \cdot T_O \cdot B$ eingesetzt.

Das führt zu:

$$F = \frac{P_{Noise\_OUT}}{k \cdot T_O \cdot B \cdot G} \qquad (6)$$

Die Rauschleistung am Ausgang des Zweitores besteht aus zwei zueinander unkorrelierten Anteilen. Der erste häufig größere Anteil ist die mit der Leistungsverstärkung verstärkte Quellrauschleistung für die international vereinbarte Rauschbezugstemperatur von T_O=290K. Der zweite Anteil ist die Zusatzrauschleistung, die vom Zweitor selbst verursacht wurde:

$$F = \frac{P_{Noise\_IN} \cdot G + P_{Noise\_ZUSATZ}}{k \cdot T_O \cdot B \cdot G} = \frac{k \cdot T_O \cdot B \cdot G + P_{Noise\_ZUSATZ}}{k \cdot T_O \cdot B \cdot G} = 1 + \frac{P_{Noise\_ZUSATZ}}{k \cdot T_O \cdot B \cdot G} = 1 + F_{ZUSATZ} \qquad (7)$$

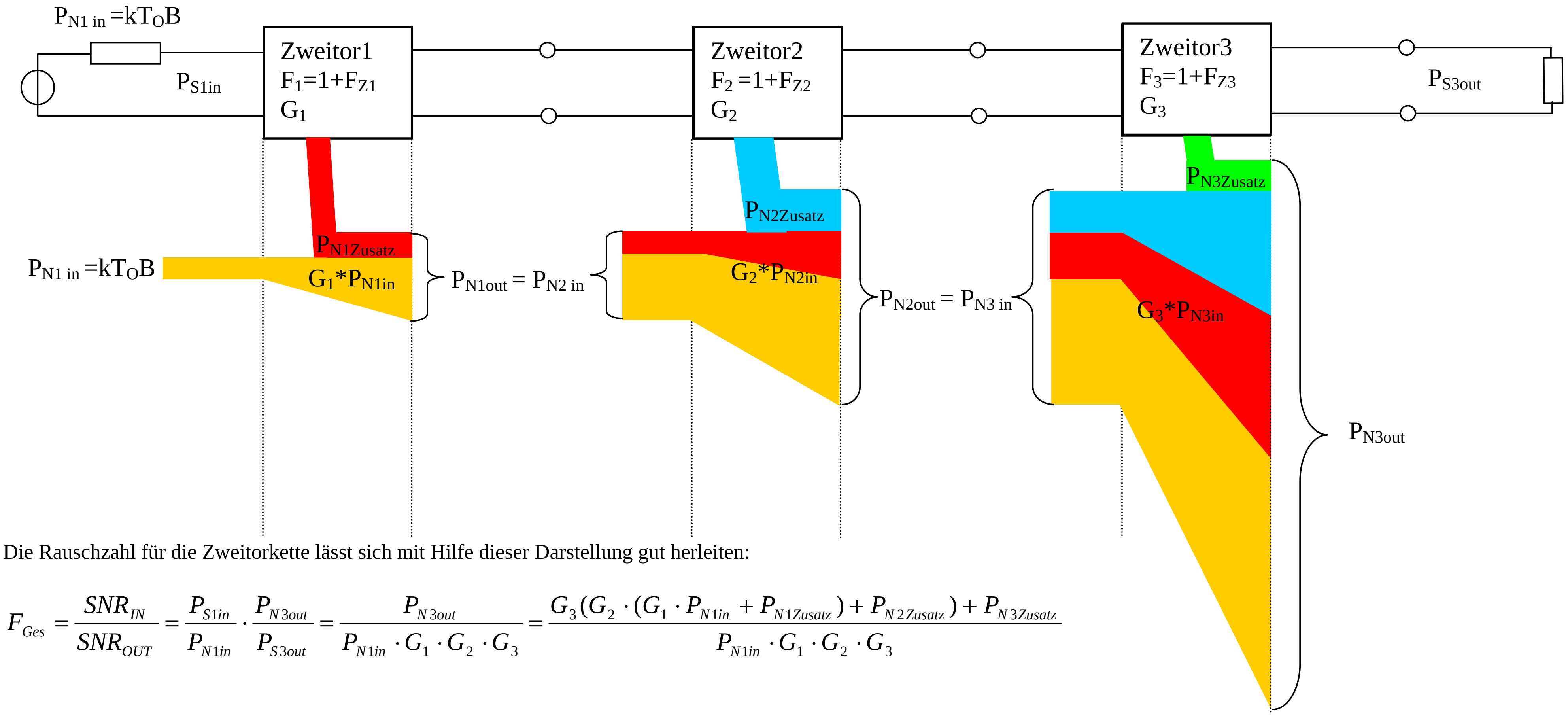
Das Rauschmaß F ist also das Verhältnis aus verstärkter Quellrauschleistung plus Zusatzrauschleistung des Zweitores und der durch das Zweitor verstärkten Quellrauschleistung. Das Rauschmaß stellt ein Rauschleistungsverhältnis dar. Wird es in dB ausgedrückt, dann erhält man die Rauschzahl (engl. NF=NoiseFigure) :

$$F_{dB} = 10 \cdot \log F \qquad (8)$$

Leider ist die Verwendung der Begriffe nicht einheitlich geregelt und es kommt manchmal zu Vertauschungen bei der Begriffsverwendung von Rauschmaß und Rauschzahl.

Die Kettenrauschzahl

In der folgenden Grafik wird die Höhe der Rauschleistung durch die Breite der Streifen dargestellt. Verstärkerzweitore machen zwischen dem Rauschen und dem Signal keinen Unterschied. Beide werden mit der Leistungsverstärkung gleichermaßen verstärkt. Das dadurch bedingte Anwachsen des Rauschens von Stufe zu Stufe ist gut zu erkennen. Auch kann man sehen, dass bereits in der dritten Stufe der Rauschbeitrag der Stufe selber nur noch einen prozentual kleinen Anteil zum Gesamtrauschen beisteuert. Rauschbetrachtungen lohnen sich daher meist nur für die ersten 2 bis 3 Verstärkerstufen eines nachrichtentechnischen Systems:



Die Rauschzahl für die Zweitorkette lässt sich mit Hilfe dieser Darstellung gut herleiten:

$$F_{Ges} = \frac{SNR_{IN}}{SNR_{OUT}} = \frac{P_{S1in}}{P_{N1in}} \cdot \frac{P_{N3out}}{P_{S3out}} = \frac{P_{N3out}}{P_{N1in} \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3} = \frac{G_3(G_2 \cdot (G_1 \cdot P_{N1in} + P_{N1Zusatz}) + P_{N2Zusatz}) + P_{N3Zusatz}}{P_{N1in} \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}$$

Alle Klammern auflösen und als einzelne Brüche schreiben führt zu:

$$F_{Ges} = \frac{G_3(G_2 \cdot (G_1 \cdot P_{N1in} + P_{N1Zusatz}) + P_{N2Zusatz}) + P_{N3Zusatz}}{P_{N1in} \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3} = \frac{G_3(G_2 \cdot G_1 \cdot P_{N1in} + G_2 \cdot P_{N1Zusatz} + P_{N2Zusatz}) + P_{N3Zusatz}}{P_{N1in} \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}$$

$$F_{Ges} = \frac{G_3 \cdot G_2 \cdot G_1 \cdot P_{N1in} + G_3 \cdot G_2 \cdot P_{N1Zusatz} + G_3 \cdot P_{N2Zusatz} + P_{N3Zusatz}}{P_{N1in} \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}$$

$$F_{Ges} = 1 + \frac{P_{N1Zusatz}}{P_{N1in} \cdot G_1} + \frac{P_{N2Zusatz}}{P_{N1in} \cdot G_1 \cdot G_2} + \frac{P_{N3Zusatz}}{P_{N1in} \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}$$

mit $P_{N1in} = k \cdot T_0 \cdot B$ erhält man:

$$F_{Ges} = 1 + \frac{P_{N1Zusatz}}{k \cdot T_0 \cdot B \cdot G_1} + \frac{P_{N2Zusatz}}{k \cdot T_0 \cdot B \cdot G_1 \cdot G_2} + \frac{P_{N3Zusatz}}{k \cdot T_0 \cdot B \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3} = 1 + F_{1Zusatz} + \frac{F_{2Zusatz}}{G_1} + \frac{F_{3Zusatz}}{G_1 \cdot G_2}$$

mit $F_{nZ} = F_n - 1$

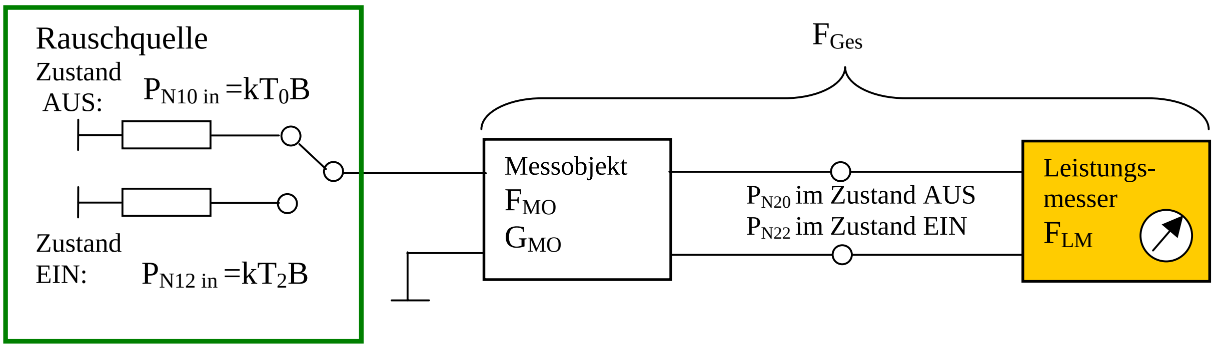
erhält man:

$$\boxed{F_{Ges} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 \cdot G_2}} \qquad (9)$$

Das ist die de Frijs'sche Formel zur Berechnung des Gesamtrauschmaßes einer Kette von 3 Zweitoren. Das Rauschmaß der ersten Stufe geht voll ein. Die Rauschmaße der Folgestufen gehen nur dividiert durch die Leistungsverstärkung der vorherigen Stufen ein.

Messung des Rauschmaßes mittels schaltbarer Rauschquelle

Der Messaufbau besteht aus einer EIN- und AUS-schaltbaren Rauschquelle, dem Prüfling und einem Leistungsmesser. Dafür kann oft ein Spektrumanalysator verwendet werden:

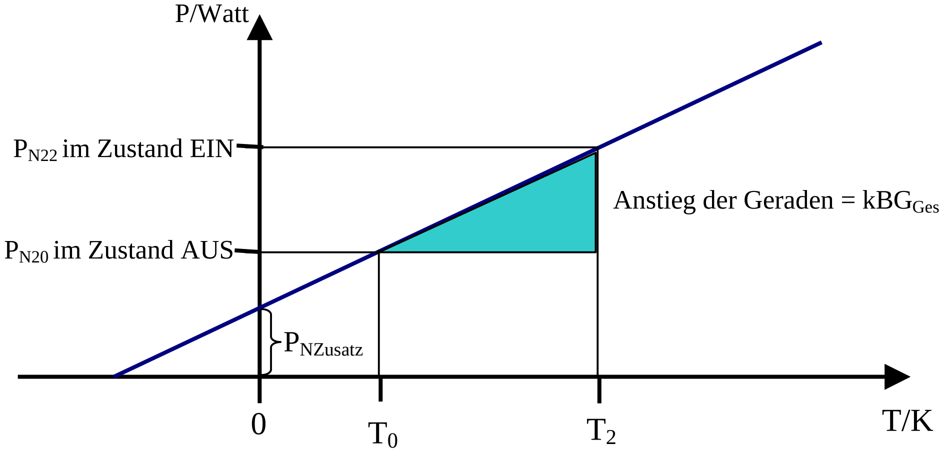


Das Prinzip dieser Messung beruht auf der Umschaltbarkeit der Quellrauschleistung. Die erhöhte Quellrauschleistung nach dem Einschalten der Rauschquelle wird durch eine stark rauschende Zenerdiode realisiert, welche durch einen selbstverstärkenden Lawineneffekt eine sehr hohe zusätzliche Rauschleistung verursacht. Die erhöhte Rauschleistung entspricht mathematisch gesehen einer thermischen Rauschquelle mit höherer Temperatur, da sich die Boltzmannkonstante und die Bandbreite der Anordnung ja nicht verändert hat durch das Einschalten der Rauschquelle. Das ENR der Rauschquelle enthält den durch die Quelle machbaren „Temperatursprung“. ENR steht für Excess Noise Ratio, ist für die jeweilige Quelle angegeben und wird in dB ausgedrückt:

$$ENR = 10 \cdot \log\left(\frac{T_2}{T_0} - 1\right) \qquad (10)$$

Für Rauschquellen werden zum Beispiel 15,5dB und 6,5dB verwendet.

Trägt man die gemessene Rauschleistung am Zweitorausgang als Funktion der absoluten Temperatur auf, dann erhält man ein einfache Geradendarstellung, mit deren Hilfe man die Rauschzahl bestimmen kann:



Das Verhältnis der Gesamtausgangsrauschleistung des Zustandes EIN zu der des Zustandes AUS nennt man den Y-Faktor, der sich wie folgt zusammensetzt:

$$Y - Faktor = \frac{P_{N22}}{P_{N20}} = \frac{kBG_{ges} \cdot T_2 + P_{NZusatz}}{kBG_{ges} \cdot T_0 + P_{NZusatz}} \qquad (11)$$

Im Y-Faktor ist also der Beitrag des unbekannten Zweitores $P_{Nzusatz}$ enthalten. Um das Rauschmaß mit Hilfe der beiden Leistungsmesswerte und der gegebenen Temperaturen zu errechnen geht man wie folgt vor. Der Geradenanstieg ergibt sich aus:

$$kBG_{Ges} = \frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{P_{N22} - P_{N20}}{T_2 - T_0} \qquad (12)$$

Das wird eingesetzt in die Formel (6) für das Rauschmaß:

$$F_{Ges} = \frac{P_{Noise\_OUT}}{k \cdot T_O \cdot B \cdot G_{Ges}} = \frac{P_{N20}}{T_O \cdot \left(\frac{P_{N22} - P_{N20}}{T_2 - T_0}\right)} = \frac{P_{N20} \cdot (T_2 - T_0)}{T_O \cdot (P_{N22} - P_{N20})} = \frac{\frac{(T_2 - T_0)}{T_O}}{\frac{(P_{N22} - P_{N20})}{P_{N20}}} = \frac{\left(\frac{T_2}{T_O} - 1\right)}{\left(\frac{P_{N22}}{P_{N20}} - 1\right)} = \frac{\left(\frac{T_2}{T_O} - 1\right)}{(Y - 1)}$$

Die Rauschzahl in dB ergibt sich:

$$F_{dBGes} = 10 \cdot \log\left(\frac{T_2}{T_O} - 1\right) - 10 \cdot \log(Y - 1) = ENR - 10 \cdot \log(Y - 1) \qquad (13)$$

Das Elegante bei der Methode ist, dass die Bandbreite nicht ermittelt werden muss, da bis auf die Quelltemperaturumschaltung der Messaufbau unverändert bleibt für beide Messzustände. Es ist aber dafür zu sorgen, dass die Temperatur des Prüflings möglichst unverändert bleibt bei der Aufnahme der Leistungsmesswerte in den beiden Zuständen der Rauschquelle.