LOESUNGEN ZU DEN UEBUNGEN ELEKTROTECHNIK 1

Berechnung von Gleichstromnetzwerken

A1

$$\frac{I1}{I2} = \frac{R2}{R1} \quad ; \quad \frac{U1}{U2}=1 \quad ; \quad R_{Gesamt}=\frac{R1 \cdot R2}{R1+R2} \quad ; \quad \frac{I1}{Igesamt}=\frac{R2}{R1+R2}$$

A2

$$\frac{U1}{U2}=\frac{R1}{R2} \quad ; \quad \frac{U2}{Uo}=\frac{R2}{R1+R2} \quad ; \quad Igesamt=\frac{Uo}{R1+R2}$$; Maschengleichung $Uo=U1+U2$

A3

I1= 0,3A (durch den Zweig 2Ω und 5Ω) ; I2=0,7A   Werte der Ersatzschaltung: Uo=2,1V; Ri=2,1Ω ; Ik=1A

A4

Iges=172,36mA; Ersatzzweipolnetzwerk U_{AB}=3,447V ; Ik= 555mA

A5

$$U=\frac{10}{3}V \quad ; \quad I1=\frac{10}{15}A \quad ; \quad I2=\frac{5}{15}A \quad ; \quad P1=\frac{20}{9}W \quad ; \quad P2=\frac{10}{9}W \quad ; \quad Pges=\frac{10}{3}W$$

A6

$$Ri=\frac{6}{25}\Omega$$

A7

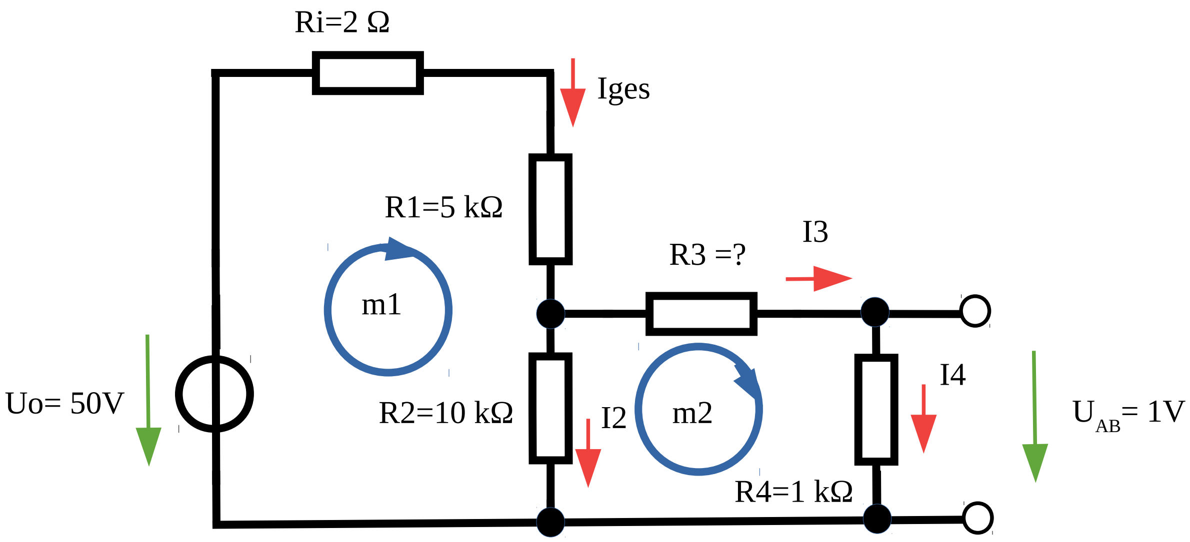
R3=29kΩ ; Werte des Ersatzzweipols : Ri= 970,15Ω ; Uo=1V und Ik=1,03mA

Beispiel für einen möglichen Weg der R3 Bestimmung:

Schrittweise vorgehen:

1.) Alle Ströme einzeichnen und deren Richtungen festlegen und das System fest beibehalten bis zum Ende:

Es gilt I3=I4, da das Klemmenpaar A B nicht belastet wird.



2.) Ausgangslage und Vorbetrachtung zur Lösung:
Es gibt nur 3 „echte“ Zweige und daher 3 voneinander verschiedene Ströme. Dafür brauchen wir 3 voneinander unabhängige Gleichungen um die Ströme herauszufinden. Unabhängig heisst, dass jeder Strom mindestens in einer Gleichung vorkommt. „Echte“ Knoten gibt es nur 2. Da die Klemmen AB unbelastet sind, sind die an R4 liegenden dargestellten Knoten keine Knoten im Kirchhoff'schen Sinne und R3 und R4 bilden nur einen Zweig. Der zweite Zweig besteht aus R2 und der dritte und letzte besteht aus der Kette Uo, Ri und R1. Alle 3 Zweige verbinden die gleichen zwei Knoten, die sich an R2 befinden.

3.) Aufstellen der unabhängigen Gleichungen:

Es können Knoten und Maschengleichungen aufgestellt werden. Bei 2 Knoten (Knotenanzahl k=2) erhält man nur k-1 unabhängige Knotengleichungen. Die anderen beiden werden durch Maschengleichungen aufgestellt: Wir wählen mal m1 und m2 als Maschenumläufe. Wichtig ist, dass alle „echten“ Zweige mindestens einmal durchlaufen wurden von mindestens einer Masche um alle unbekannten Ströme zu beteiligen.

Maschengleichung m1: $U_0=U_i+U_1+U_2$ (I)

Maschengleichung m2: $U_2=U_3+U_{AB}$ (II)

Jetzt m2 in m1 einsetzen, das eliminiert U2 und erhält uns U3,welches uns später zu R3 führen wird:

$Uo=Ui+U1+U3+U_{AB}$ (II) in (I)= (III)

Etwas umordnen, so dass die gegebenen Spannungen auf eine Seite kommen:

$$U_0 - U_{AB} = U_i + U_1 + U_3 \qquad \text{(I I I)}$$

und mit Hilfe des ohmschen Gesetzes drücken wir die Spannungen mit R*I aus. Das bringt die gesuchten Zweigströme in die Maschengleichungen hinein:

$$U_0 - U_{AB} = (R_i + R_1) \cdot I_{ges} + R_3 \cdot I_4 \qquad \text{(I I I)}$$

Jetzt brauchen wir noch eine Gleichung die auch Iges und I4 enthält, dann hätten wir zwei Gleichungen mit den gleichen zwei unbekannten und könnten auflösen. Dazu bietet sich beispielsweise eine Anwendung der Stromteilerregel an:

Merksatz : Gesamtstrom verhält sich zum Teilstrom, wie der Ringwiderstand zum vom Teilstrom nicht durchflossenen Widerstand, also den jeweils anderen R:

Hier angewendet ergibt sich die Gleichung: $\frac{I_{ges}}{I_4} = \frac{R_2 + R_3 + R_4}{R_2}$ (I V)

Jetzt wird nach Iges umgestellt: $I_{ges} = \frac{R_2 + R_3 + R_4}{R_2} \cdot I_4$ (I V)

und das Ergebnis in die von den Maschengleichungen abstammende Gleichung eingesetzt:

$$Uo - U_{AB} = \frac{(R_i + R_1) \cdot I_4 \cdot (R_2 + R_3 + R_4)}{R_2} + R_3 \cdot I_4 \qquad \text{(I V) in (I I I) = (V)}$$

Das eliminiert Iges aus der Gleichung.

Umstellen nach der gesuchten Größe:

$$R_3 = \frac{\frac{Uo - U_{AB}}{I_4} - \frac{(R_2 + R_4) \cdot (R_1 + R_i)}{R_2}}{1 + \frac{(R_1 + R_i)}{R_2}} \qquad \text{(V)}$$

Weiterhin ist I4 =Uab/R4=1mA .

Einsetzen der gegebenen Werte ergibt R3=29kΩ

A8

Der Helmholtzsch‘e Überlagerungssatz wird angewandt um ein weiteres Lösungsverfahren kennenzulernen.

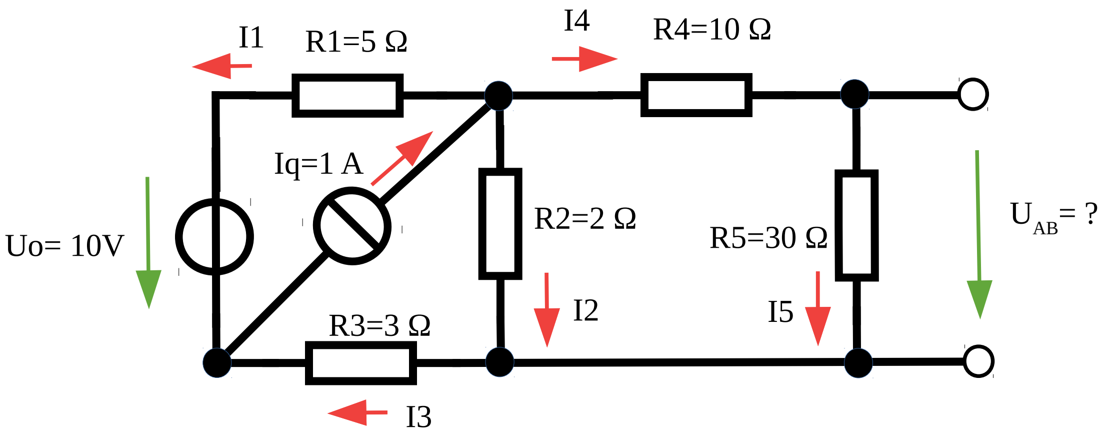
Der Ansatz von Helmholtz ist, dass bei mehreren Energiequellen im Netzwerk deren einzelne Beiträge anfänglich getrennt betrachtet werden. Das Gesamtergebnis für die letztendlich fliessenden Ströme erhält man durch die vorzeichenrichtige Addition dieser von den einzelnen Quellen verursachten Teilströme.

Ein Nachteil der Methode ist, dass pro Quelle einmal das ganze Netzwerk berechnet werden muss.

Der Vorteil besteht darin, dass durch nur ein aktive Quelle pro Netzwerkberechnung der einzelne Rechengang deutlich einfacher verläuft.

1.) Vorbereitung: Festlegen der Richtung aller Zweigströme:

Fliessen die Ströme am Ende in der anderen Richtung merkt man das am negativen Vorzeichen des Ergebnisses. Wichtig ist, dass die anfänglich festgelegte Richtung bei allen Teilrechnungen strikt beibehalten wird:



Wir haben zwei Quellen und benötigen daher zwei Teilrechengänge: Die Reihenfolge der Rechnung ist prinzipiell egal.

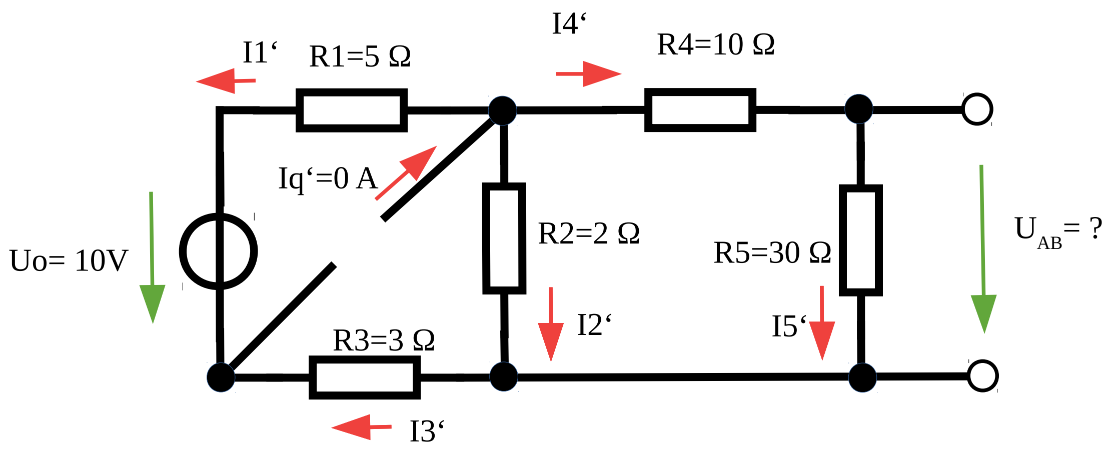
Beim ersten Rechengang lassen wir Uo =10V AN und schalten die Stromquelle Iq= 1A auf AUS.

Beim zweiten Rechengang schalten wir die Spannungsquelle Uo =10V AUS und lassen die Stromquelle Iq=1A AN.

Es empfiehlt sich eine eigene Schaltskizze pro Rechengang um den Überblick zu behalten.

Eine deaktivierte Spannungsquelle belässt 0 Ohm Innenwiderstand im Zweig, eine deaktivierte Stromquelle belässt einen unendlich hohen Innenwiderstand in ihrem Zweig. Letzteres entspricht einem unterbrochenen Zweig.

Erster Rechengang und zugehörige Skizze: Uo =10V AN Iq= AUS



Das Netzwerk zum 1. Rechengang besteht nur noch aus drei Zweigen und zwei echten Knoten und zwar die an R2.

Es lässt sich festhalten: $I_{ges}'=-I_1'=I_3'$ und $I_{ges}'=\frac{U_0}{R_{ges}'}$

mit $R_{ges}'=R_1+R_3+\frac{R_2\cdot(R_4+R_5)}{R_2+R_4+R_5}$

Werte einsetzen liefert : $R_{ges}'=5\,\Omega+3\,\Omega+\frac{2\,\Omega\cdot(10\,\Omega+30\,\Omega)}{42\,\Omega}=\underline{9{,}905\,\Omega}$

und $I_{ges}'=\frac{10\,V}{9{,}905\,\Omega}=\underline{1{,}0096\,A}=-I_1'=I_3'$

Mit der Anwendung der Stromteilerregel erhalten wir weiterhin :

$$I_5'=\frac{R_2}{R_2+R_4+R_5}\cdot I_{ges}'$$

Einsetzen der Werte liefert: $I_5'=\frac{2\,\Omega}{2\,\Omega+10\,\Omega+30\,\Omega}\cdot 1{,}0096\,A=\underline{48{,}077\,mA}=I_4'$

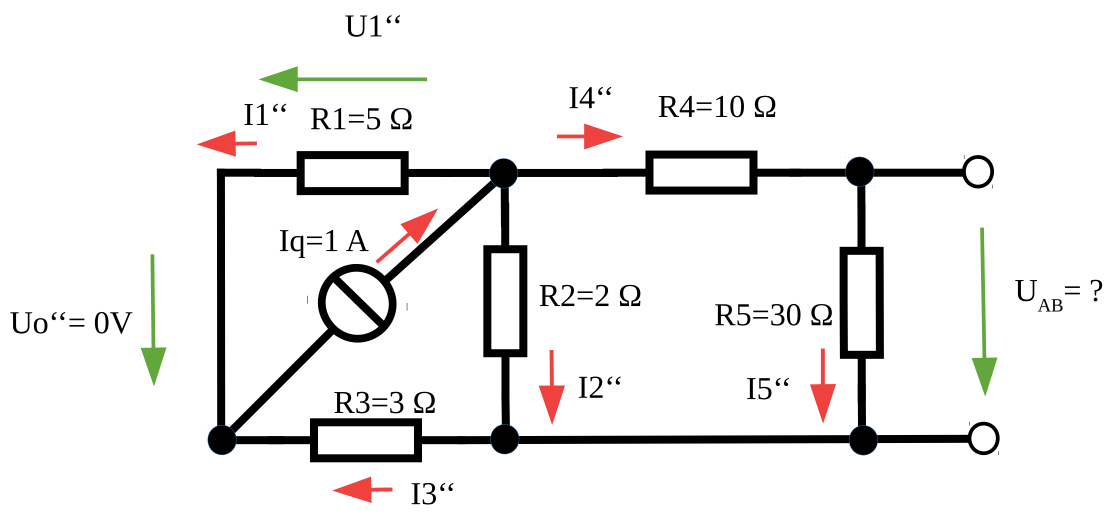
Es gilt weiterhin unter Beachtung des Knotenpunktsatzes: $I_2'=I_3'-I_5'$

Werte einsetzen: $I_2'=1{,}0096\,A-0{,}048077\,A=\underline{0{,}9615\,A}$

Nur der Vollständigkeithalber erwähnt, da dieser Strom zur Ermittlung von U_{AB} nicht benötigt wird.

Damit ist der erste Rechengang beendet.

Zweiter Rechengang und zugehörige Skizze: Iq= 1A AN Uo=AUS



Jetzt bietet sich das Ausrechnen der Spannung über der Stromquelle an:

$$U_q = U_1'' = R_{ges}'' \cdot I_q$$

R4 in Reihe mit R5 liegt parallel zu R2. Die drei zusammengefasst nennen wir mal R2345:

$$R_{2345}'' = \frac{R_2 \cdot (R_4 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5} + R_3 = \underline{4{,}905\,\Omega}$$

$$R_{ges}'' = \frac{R_{2345} \cdot R_1}{R_{2345} + R_1} = \underline{2{,}4759\,\Omega}$$

$$U_1'' = I_q \cdot R_{ges}'' = \underline{2{,}4759\,V}$$

Spannung über R1 ist damit bekannt, dann ist

$$I_1'' = \frac{U_1''}{R_1} = \underline{0{,}495\,A}$$

Der linke untere Knoten liefert uns die Gleichung:

$$I_3'' = I_q - I_1'' = \underline{0{,}505\,A}$$

Jetzt noch eine Stromteilerregel:

$$I_5'' = I_4'' = \frac{R_2}{R_2 + R_4 + R_5} \cdot I_3'' = \underline{24{,}048\,mA}$$

Ende des zweiten Rechenganges.

Alle 5 Ströme ergeben sich aus der vorzeichenrichtigen Aufaddition der beiden Rechengänge.

Hier wird nur I5 benötigt:

$$I_5 = I_5' + I_5'' = 48{,}077\,mA + 24{,}048\,mA = \underline{72{,}124\,mA}$$

Das Endergebnis ist dann:

$$U_{AB} = I_5 \cdot R_5 = \underline{2{,}164\,V}$$